LK Mathematik	Arbeitsblatt ALY EX2b Ableitung von Exponentialfunktionen	LK 12.1
NAME:		

1. Aufgabe:

Untersuchen Sie die Funktion $f(x)=2^x$. Stellen Sie mit Hilfe von Derive eine Funktion $DFQ(x,h)=\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ auf.
Bestimmen Sie die Werte des Grenzwertes für x=a und x=0.

Es gilt:

1) $\lim\limits_{x\to a} DFQ(x,h)=2^a\cdot\left(\frac{2^h-1}{h}\right)$

2) $\lim\limits_{x\to 0} DFQ(x,h)=\frac{2^h-1}{h}$

Welche Aussage können Sie bezüglich der Ableitungsfunktion f'(a) in Abhängigkeit von f'(0) treffen?

$f'(a)=f'(0)\cdot 2^a=f'(0)\cdot f(x)$, d.h. bis auf den Faktor f'(0) stimmt die Ableitungsfunktion der Exponentialfunktion mit der Exponentialfunktion überein.

Bestimmen Sie in Form einer Tabelle für h=0,1; 0,01; 0,001 0,000001 jeweils DFQ(0,h).

h	0,1	0,01	0,001	0,000001
DFQ(0,h)	0,7177346253	0,6955550057	0,6933874616	0,6931407942

Welcher Wert ergibt sich als Grenzwert für h→0?

$f'(0)=\lim\limits_{h\to 0} DFQ(0,h)=\ln 2\approx 0{,}6931471805$

2. Aufgabe:

Wiederholen Sie die Schritte der 1. Aufgabe für die Funktionen $f(x)=\left(\frac{5}{2}\right)^x$ und $f(x)=3^x$.

$f(x)=\left(\frac{5}{2}\right)^x \Rightarrow f'(0)=\ln\left(\frac{5}{2}\right)\approx 0{,}9162907318$

$f(x)=3^x \Rightarrow f'(0)=\ln 3\approx 1{,}098612288$

Geben Sie eine Formel für f'(x) an.

$f(x) = a^x \Rightarrow f'(x) = \ln a \cdot a^x = \ln a \cdot f(x)$

Welche geometrische Bedeutung hat der betrachtete Wert $f'(0) = \lim_{h \to 0} DFQ(0,h)$?

Der Wert f'(0) gibt die Steigung der Exponentialfunktion im Punkt (0 | 1) an.

Welche Vermutung können Sie für einen speziellen Wert 2<a<3 bezüglich auf f'(0) anstellen?

Es muss einen Wert 2<a<3 geben, so dass $f'(0) = 1$ gilt.

Was gilt für diesen Wert dann für f'(x)?

Für diesen Wert gilt dann: $f'(x) = f(x)$, da $f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{a^h - 1}{h} = 1$ für diesen Wert ist.

Versuchen Sie den Wert von a auf 5 Nachkommastellen genau zu bestimmen.

Da $f'(0) = \ln a$ ist, ist dasjenige a zu suchen, für das ln a = 1 ist. Das ist der Fall für $a = e \approx 2{,}71828$. Diese Zahl nennt man nach Leonard Euler die **Eulersche Zahl** e.

<u>Satz:</u>

Für die **natürliche Exponentialfunktion** $f(x) = e^x$ gilt: $f'(x) = f(x) = e^x$; d.h. die Ableitungsfunktion der natürlichen Exponentialfunktion ist die Funktion selbst.